Analyse Complexe
TD 5
Fonctions méromorphes, théorème des résidus

Exercice 1 Déterminer les bijections holomorphes de $\mathbb{C}$ sur lui-même. Question analogue en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, $f \in H(U \backslash \{a\})$.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ pour tout $z \in U \backslash \{a\}$. Montrer que a est une singularité artificielle de f.
2. Dans cette question, on suppose que a est un pôle de f. Soit g une fonction entière. Montrer que a est une singularité essentielle de $g \circ f$ si et seulement si g n'est pas un polynôme.

Exercice 3 On dit qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$ est *holomorphe* si elle est holomorphe en chaque variable séparément. On considère les ouverts

$$U = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|, |z_2| < 1\right\} \quad ; \quad U' = U \backslash \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|, |z_2| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Montrer qu'une fonction holomorphe f sur U' s'étend toujours en une fonction holomorphe sur U. On pourra regarder le développement en série de Laurent de f en la variable z_2.

Les fonctions holomorphes en plusieurs variables se comportent donc très différemment des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui sont l'objet du cours !

Exercice 4

1. Soit $n > 1$ un entier. En utilisant le secteur angulaire de rayon R et d'angle $2\pi/n$, calculer l'intégrale :
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}.$$
2. *Généralisation.* Soit n un entier et α un réel tels que $0 < \alpha + 1 < n$. En utilisant le contour délimitant le morceau de couronne $\{z = \rho e^{i\theta}, 0 < r \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\}$, calculer l'intégrale :
$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n} dx.$$
3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto 1/\cosh(\pi x)$ en utilisant le contour délimitant le rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + 2i$.

Exercice 5 Soit $n \geq 2$ un entier. En évaluant l'intégrale de la fonction

$$z \mapsto \frac{e^{2i\pi z^2/n}}{e^{2i\pi z} - 1}$$

le long du contour délimitant le rectangle de sommets $\pm iR$, $\pm iR + n/2$ privé des cercles centrés en 0 et $n/2$ de rayon $\epsilon > 0$, calculer la *somme de Gauss* :

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{2i\pi k^2/n}.$$

Exercice 6 On note $f(z) = \tan(z) - z$. Où sont les pôles de f ? Où sont les zéros de f sur l'axe réel ?

A l'aide du contour C_N délimitant le carré centré en l'origine de côtés de longueur $2\pi N$ ($N \geq 1$ entier), montrer que toutes les solutions de l'équation $\tan(z) = z$ sont réelles.

Exercice 7

1. Soit $n > 1$ entier et $a \in \mathbb{R}$ avec $a > e$. Montrer que l'équation
$$az^n - e^z = 0$$
possède n racines simples dans le disque unité ouvert D.
2. Déterminer le nombre de zéros du polynôme $z^{20} - 14z^3 + z - 2$ dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Exercice 8 (*) En appliquant le théorème de Rouché à $z \sin z$ et $z \sin z - 1$, montrer que toutes les solutions de l'équation $z \sin z = 1$ sont réelles.

Exercice 9

1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $f \in H(U)$ telle que $-1, 1 \notin f(U)$. Montrer qu'il existe $g \in H(U)$ telle que :
$$f = \cos g.$$
2. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $f \in H(U)$ telle que $0, 1 \notin f(U)$. Montrer qu'il existe $h \in H(U)$ telle que
$$f = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi(\cos \pi h)).$$
3. On note $R = \{m \pm i\pi^{-1}\ln(n + \sqrt{n^2 - 1}), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $h(U)$ ne rencontre pas R. En déduire que $h(U)$ ne contient aucun disque de rayon 1.
4. A l'aide de l'exercice 7 du TD 2, en déduire que si $f \in H(\mathbb{C})$ est telle que $0, 1 \notin f(\mathbb{C})$, f est constante. En déduire le "petit théorème de Picard" : une fonction entière non constante évite au plus un nombre complexe.
5. *Première application.* Soit f une fonction entière. Montrer que $f \circ f$ a toujours un point fixe sauf si f est une translation.
Si $f \circ f$ est sans point fixe, que peut-on dire de $z \mapsto (f(f(z)) - z)/(f(z) - z)$?
6. Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ sont solutions de l'équation de Fermat
$$f^n + g^n = 1$$
soit f et g sont constantes, soit elles ont des pôles en commun. Que dire si $n = 2$?
Pour $n = 3$, la théorie des courbes elliptiques montre qu'il existe effectivement des solutions méromorphes non constantes à l'équation de Fermat.